Piin historiaa

Kari Peisa, 2019

Piin käsite suureena esimerkiksi ympyrän pinta-alaa laskettaessa on hyvin vanha. Mainintoja siitä löytyy mm. egyptiläisestä Rhindin Papyruksesta n.1650 eaa.. Siinä piille annetaan likiarvo, joka on suuruudeltaan 3.16. Babylonian savilaatoista löytyy suurin piirtein samalta aikakaudelta arvio, joka vastaa lukua $3\frac{1}{8}$. Piin tarkemman likiarvon laskeminen on yksi haara piin tutkimuksista, joka on jatkunut nykypäiviin saakka.

Antiikin kreikkalaiset olivat ensimmäiset, joiden tiedetään yrittäneen ratkaista piin tarkkaa arvoa matemaattiseen järjestelmään perustuvilla täsmällisillä todistuksilla noin 500-luvulta eaa. lähtien. 300-luvulla eaa. asetti Platon kolme kuuluisaa ongelmaa, joista yksi oli piirtää annetun ympyrän kokoinen neliö. Kaksi muuta olivat kuution kahdentaminen ja kulman kolmijako. Ratkaisun piti tapahtua sellaisilla geometrisilla konstruoinneilla, joissa apuvälineinä sai käyttää vain merkitsemätöntä viivainta ja harppia. Nykytiedon mukaan tämä merkitsi tuon ajan matematiikassa sitä, että olisi konstruoitava jana, jonka pituus on täsmälleen $\sqrt{\pi}$. Ympyrän neliöintiongelma oli haasteena etevimmille matemaatikoille aina 1800-luvulle asti.

Geometrian lisäksi myös toinen piin täsmällisen ratkaisemisen kannalta tärkeä tekijä sai alkunsa antiikista nimittäin reaalilukujen järjestelmä, vaikka luvut ja niiden algebrallinen käsittely eivät olleet tuon ajan matematiikan tutkimuskohteina. Suureet liitettiin aina janan pituuteen, kuvion pinta-alaan tai kappaleen tilavuuteen. Antiikin aikaan ymmärrettiin kuitenkin, että geometrisen jatkumon muodostamiseen tarvitaan rationaalisten suureiden (kokonaislukujen suhde) myös suureita, joita kutsuttiin yleisesti *yhteismitattomiksi*. Yhteismitattomuus ymmärrettiin eri antiikin ajanjaksoina hieman eri tavalla, mutta Eukleideen geometrian oppikirjassa Stoikheia (Alkeet, noin 300 eaa.) yhteismitattomuudelle annettiin eksakti määritelmä, jonka kehittäjänä pidetään Eudoksos Knidoslaista.

Yhteismitattomuuden määrittely ja antiikin ajan integraalilaskennan kaltaisen ekshaustiomenetelmän kehittyminen mahdollistivat irrationaalisiin suureisiin liittyvät täsmälliset todistamiset. Menetelmän perusidea on yksinkertainen: vähennetään toistuvasti suureesta pienempi suure, joka on enemmän kuin puolet siitä ja prosessia jatkuvasti jatkaen saadaan jäännös pienemmäksi kuin mikä tahansa annettu suure. Todistuksissa käytettiin yleisesti epäsuoran todistamisen periaatetta, missä päädytään ristiriitaan lauseen ehdon kanssa.

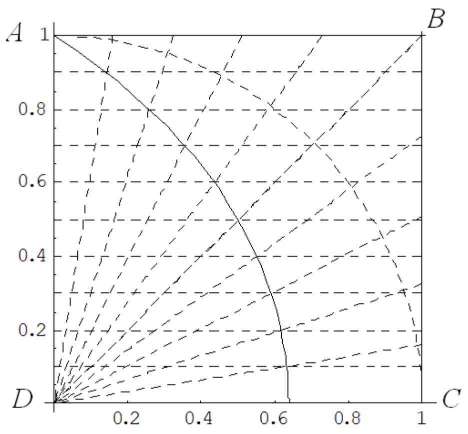
Kuuluisin ekshaustiotodistus lienee neliön lävistäjän ja sivun yhteismitattomuuden todistus, joka löytyy Stoikheian kirjasta X lauseesta 117. Antiikin aikaan tunnettiin jo useiden neliöjuurilausekkeiden irrationaalinen luonne eli yhteismitattomuus ykkösen kanssa. Piin suhteen kyettiin todistamaan, että ympyrät suhtautuvat toisiinsa kuten niiden halkaisijoiden neliöt (Stoikheian kirja XII). Tämä todisti, että ympyrän pinta-ala on vakio $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kertaa halkaisijan neliö. Arkhimedes (200-luku eaa.) todisti edelleen, että aikaisemmin tiedetyissä ympyrän alaa ja kehän pituutta koskevissa kaavoissa $A = \pi_1 r^2$ sekä $P = \pi_2 d$, missä r on säde ja d on halkaisija, vakiot π_1 ja π_2 ovat samat. Hän käytti lopulta ympyrän sisään ja ulkopuolelle piirrettyjä 96-kulmioita, ja sai ekshaustiomenetelmällä arviot π:n ala- ja ylärajoille $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Arkhimedes todisti myös piihin liittyviä tilavuuslauseita kuten sen, että pallon tilavuus on neljä kertaa sellaisen kartion tilavuus, jonka kantaympyrä on sama kuin pallon isoympyrä ja korkeus sama kuin pallon säde.

Piin täsmällisen ratkaisun yritykset eivät antiikissa edenneet edellistä pitemmälle. Syykin on selvä nykyisen tiedon valossa. Pii ei ole algebrallinen irrationaalinen luku, jota sen olisi pitänyt olla, mikäli antiikin ajan menetelmillä sille olisi ollut edes mahdollista löytää täsmällinen ratkaisu. Pii on transsendenttiluku, minkä merkitys valkeni täsmällisemmin vasta yli tuhat vuotta myöhemmin, kun antiikin Kreikan matemaattinen korkeakulttuuri oli jo sammunut.

Vasta niinkin myöhään kuin vuonna 1748 Leonhard Euler esitti teoksessa *Introductio in analysin infitorum* ensimmäisenä koko matemaattisen analyysin formaalisti ilman kytköstä geometriaan. Tällöin voidaan katsoa, että algebrallisten ja transsendenttisten lukujen ja funktioiden ero ymmärrettiin nykyisen kaltaisella tavalla, vaikka edelleen jälkimmäisille ei Eulerkaan esittänyt täsmällistä määritelmää. Eulerin mukaan algebralliset funktiot voidaan saada äärellisestä määrästä algebrallisia operaatioita. Algebralliset funktiot jaetaan rationaalisiin ja irrationaalisiin. Rationaalinen on mikä tahansa funktio, jonka muuttujaan ei liity irrationaalisia operaatioita. Sallittuja ovat vain muuttujaan kohdistuvat yhteen, vähennys-, kerto- ja jakolasku sekä kokonaislukupotenssiin korotus. Irrationaalisia operaatioita ovat ne, joissa muuttujaan kohdistuu juurenottoa. Transsendenttiset funktiot syntyvät joko äärettömästä määrästä algebrallisia operaatioita tai joistakin muista kuin algebrallisista toisin sanoen transsendenttisista operaatioista. Luku (kompleksiluku) määritellään algebralliseksi, jos se on äärellisasteisen rationaalikertoimisen polynomin nollakohta, muussa tapauksessa se on transsendenttinen. Ympyrän neliöintiongelman ratkaiseminen odotutti kuitenkin vielä yli sata vuotta.

Ensimmäiset viittaukset transsendenttisiin käyriin saatiin jo antiikin aikana ns, kineettisten käyrien muodossa. Tällainen oli mm. Hippias Elislaisen (400-luku eaa.) *Hippiaan kvadratrix* (myös *trisektrix*), jonka avulla ympyrän neliöintiongelmakin voitiin ratkaista. Hippiaan kvadratrix antaa vain likimääräisen ympyrän neliöimisen konstruktion. Tarkkaa käyrän pistettä ei voida määritellä tarkasti harpin ja viivaimen avulla.

Hippiaan kvadratrix saadaan ao. kuviosta seuraavasti: Neliön *ABCD* (kuva 1.) sivu *DA* kiertyy tasaisesti (ympyräliike) pisteen D ympäri ja sivu *AB* putoaa tasaisella nopeudella siten että ne molemmat saavuttavat yhtä aikaa kantasivun *DC*. Näiden suorien leikkauspiste piirtää Hippiaan kvadratrixin. Modernin matematiikan merkinnöillä Hippiaan kvadratrixin määrittelee polaarisen koordinaatiston transsendenttiyhtälö $r = \frac{2\theta}{\pi \sin\theta}$, missä r on etäisyys pisteestä *D* käyrän pisteelle siten, että r määrittelee kulman θ sivun *DC* kanssa (kuvassa *DC* = 1).



1.Hippiaan käyrä

Pappos Aleksandrialainen (n 300 jaa.) jakoi synagoge-nimisessä tutkielmassaan kaikki siihen asti asetetut geometriset probleemat kolmeen ryhmään: taso-, avaruus- ja viivalliset ongelmat. Ensimmäiset ovat konstruoitavissa yksinomaan ympyröistä ja suorista, toiset ratkeavat kartioleikkauksilla (nyk. = 2. asteen yhtälöillä) ja kolmannet vaativat muunlaisia käyriä (eli tuolloin kinemaattisia käyriä). Kuution kahdentaminen ja kulman jakaminen kolmeen osaan kuuluivat avaruusongelmiin ja ympyrän neliöinti viivallisiin ongelmiin. Näin Pappos totesi antiikin perintönä, että kolmea kuuluisaa ongelmaa ei voida ratkaista Platonin asettamilla ehdoilla, mutta hän ei kuitenkaan kyennyt todistamaan tätä.

1600-luvulla René Descartes todisti teoksessaan La Géométri ratkaisun kahteen antiikin ongelmaan, kuution kahdentamiseen ja kulman kolmijakoon. Descartes hyödynsi ensimmäistä kertaa algebrallisia yhtälöitä antiikin geometristen ongelmien ratkaisuissa. Hän loi analyyttisen geometrian sisältämän algebrallisten ja geometristen menetelmien synteesin käyrien yleisissä määrittelyissä ja luokitteluissa, jota ei antiikin aikana vielä tiedostettu. Descartesin todistus kulman kolmijaon ratkeamattomuudelle ei ollut täydellinen, vaan lopullisesti se todistettiin vasta 1800-luvulla.

1800-luvulla alkoi kehitys, jossa pyrittiin määrittelemään irrationaalilukujen ominaisuudet puhtaasti rationaalilukujen kuntaominaisuuksien avulla ja liittämään irrationaaliluvut täsmällisesti aritmeettisten sääntöjen avulla reaalilukujen muodostamaan jatkumoon. Tämä saatiinkin tehtyä useiden eri matemaatikkojen konstruointeina.

Vuonna 1776 Johann Heinrich Lambert ja vuonna 1806 Adrien-Marie Legendre osoittivat jatkuviin ketjumurtolukuihin perustuvalla menetelmällä, että π ja π^2 ovat irrationaalisia lukuja.
Charles Hermite todisti Académie des Sciencesin *Comptes Rendusissa* ilmestyneessä artikkelissa, että Neperin luku *e* on transsendenttinen. Lopulta vuonna 1882 saksalainen Ferdinand Lindemann osoitti *Mathematische Annalenissa* ilmestyneessä "*Über die Zahl* π"-nimisessä artikkelissa, että yhtälöllä $e^{ix} + 1 = 0$ ei ole algebrallisia juuria. Koska Euler oli osoittanut aikaisemmin, että arvo $x = \pi$ toteuttaa edellisen yhtälön, seurasi tästä välttämättä, että π ei voi olla algebrallinen luku eli se on silloin transsendenttinen.
Näin pari tuhatta vuotta vanha ympyrän neliöintiongelma oli lopulta ratkaistu.